**Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников**

**5 класс.**

1. В числе 3 728 954 106 зачеркнуть три цифры так, чтобы оставшиеся цифры в том же порядке составили бы наименьшее семизначное число. (7 баллов).

Ответ: 2 854 106.

2. Соедините точки А и В (см. рисунок) линией длиной 19 см так, чтобы она прошла через все точки, изображённые на рисунке (расстояние между двумя соседними точками, расположенными горизонтально или вертикально, равно 1 см). (7 баллов)

    

      

А В

    

    

  

3. Жучка тяжелее кошки в 3 раза, мышка легче кошки в 10 раз, репка тяжелее мышки в 60 раз. Во

сколько раз репка тяжелее Жучки? Ответ обоснуйте. (7 баллов)

Ответ*.* В 2 раза.

Решение*.* Кошка=10 мышек, репка = 60 мышек. Значит репка в 6 раз тяжелее кошки. Т.е. репка

= 6 кошек. По условию Жучка = 3 кошки. Поэтому репка в 2 раза тяжелее Жучки.

4. В данном примере различные цифры зашифрованы различными буквами. Определите, какое равенство зашифровано: **ОТВЕТ + ОЧЕНЬ = ПРОСТ. (7 баллов)**

 **Решение**.

 Зашифрованное равенство:  34214 + 35170 = 69384.

5. Четыре ученика – Витя, Петя, Юра и Сергей – заняли на математической Олимпиаде  четыре первых места. На вопрос, какие места они заняли, были даны ответы:

а)   Петя – второе, Витя – третье;

б)   Сергей – второе, Петя – первое;

в)   Юра – второе, Витя – четвертое.

Укажите, кто какое место занял, если в каждом ответе правильна лишь одна часть. Ответ обоснуйте. (7 баллов)

 Ответ: I – Петя, II – Юра, III – Витя, IV – Сергей.

**Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников**

**6 класс.**

1. В двузначном числе в два раза больше единиц, чем десятков. Если к этому числу прибавить 36, то получится число, записанное теми же цифрами. Найдите это число. (7 баллов)

Решение.

Выпишем все такие двузначные цифры: 12,24, 36, 48. Найдем сумму каждого из них с числом 36.12+36=48, 24+36=60, 36+36=72, 48+36=84.

Очевидно, что условию задачи удовлетворяет только число 48.Ответ: 48.

2. На первой остановке в пустой автобус вошло 18 пассажиров. Потом на каждой остановке

выходило 4 человека, а входило 6 человек. Сколько пассажиров ехало в автобусе между пятой

и шестой остановками? (7 баллов).

Ответ*.* 26 человек.

Решение*.*

Способ 1.

После каждой остановки, не считая первую, количество пассажиров в автобусе увеличивается

на 2 человека. Значит, со второй по пятую остановку количество человек увеличилось на 8

человек. Т.е. стало 18+8=26 человек.

Способ 2.

Со второй по пятую остановку вышло 4·4=16 человек, а вошло 4·6=24 человека. Т.е. в автобусе

стало 18-16+24=26 человек.

3. На плоскости даны 6 точек, расположенных в виде прямоугольника так, как указано на рис. 1. Сколько существует треугольников, у которых одна вершина находится в точке А, а две другие – в каких-либо остальных точках? Сколько существует таких треугольников, у которых одна вершина находится в точке F? (7 баллов).

Решение.

Указание. Обозначив буквами все остальные точки (рис.2.), нетрудно указать все треугольники: ABF, ABE, ACD, ACF, ACE, ADF, AEF.

Во втором случае также 9 способов. *Ответ: по 9 способов.*

4. Если Коля купит 11 тетрадей, то у него останется 7 рублей, а на покупку 15 тетрадей ему не хватит 5 рублей. Сколько денег у Николая? Ответ обоснуйте. (7 баллов).

Ответ: 40 рублей.

5. У мамы четыре дочери Поля, Валя, Катя и Маша. Девочки играли и разбили вазу. На вопрос: «Кто это сделал?» Поля, Валя и Катя ответили: «Не я», а Маша – «не знаю». Потом оказалось, что две из них сказали правду, а две неправду. Знает ли Маша, кто разбил вазу? Ответ объясните. (7 баллов)

Решение.

Среди ответов Поли, Вали и Кати может быть только один ложный ответ, иначе при двух ложных ответах получается, что стекло разбили двое. Тогда вторым ложным ответом будет ответ Маши. Значит, Маша знала, кто разбил стекло.

**Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников**

**7 класс.**

1. Восстановить цифры, которые заменены звёздочками, в записи деления

 2\* \* 1 : 13 = \*2\*. ( 7 баллов)

Решение: 2951 : 13= 227

**2.** В школе прошли три олимпиады. Оказалось, что в каждой из них участвовало по **50** человек. Причем, **60** человек приходило только на одну олимпиаду, а **30** человек - ровно на две. Сколько человек приняло участие во всех трех олимпиадах? (7 баллов)

Ответ: 10. Пусть *х* человек приняло участие во всех трех олимпиадах. Подсчитаем, сколько раз ученики заполняли титульные листы своих работ. Те, кто приходили один раз, делали это 60 раз; те, кто приходили дважды - также 60 раз (2∙30 = 60); те, кто приходили трижды - 3*х* раз. Так как всего работ было 3∙50 = 150, то составляем и решаем уравнение: 60 + 60 + 3*x* = 150; *x* = 10. (7 баллов)

3. В спортивной секции девочки составляют 60% числа мальчиков. Сколько процентов числа всех участников секции составляют девочки? (7 баллов)

Решение.

Пусть в спортивной секции было х мальчиков, тогда девочек – 0,6х. Они составляют (0,6x 100)/(x + 0,6x). Ответ: 37,5%.

4. Несколько гномов, навьючив свою поклажу на пони, отправились в дальний путь.

Их заметили тролли, которые насчитали в караване 36 ног и 15 голов.

Сколько было гномов и сколько пони? (7 баллов)

Решение: Можно решать эту задачу перебором. (Пусть гномов 15, тогда ног получалось 30 – не подходит. Пусть гномов 14, тогда...) Можно составить уравнение…

Более красивый способ рассуждения такой: если бы все были гномами, то ног бы было 30, т.е. у нас есть 6 «лишних» ног. Замена гнома на пони добавляет две ноги. Значит, **было 3 пони и 12 гномов.**

5. Ваня, Петя, Саша и Коля носят фамилии, начинающиеся на буквы В, П, С и К.  Известно, что

a) Ваня и С. – отличники;

б) Петя и В. – троечники;

в) В. ростом выше П.;

г) Коля ростом ниже П.;

д) Саша и Петя имеют одинаковый рост.

На какую букву начинается фамилия каждого мальчика? Ответ обоснуйте. (7 баллов)

Ответ: Саша - В., Петя – К., Коля – С., Ваня – П.

**Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников**

**8 класс.**

**1**. Две соседних стороны прямоугольника относятся как 3:7. Чему равна площадь прямоугольника, если его периметр равен 40 см? (7 баллов)

Ответ. 84 см2. Из условий задачи меньшая сторона прямоугольника равна 3*х*, а большая 7*х* при некотором *х*. Тогда периметр равен , откуда x =2. Площадь прямоугольника равна .

**2**. Петя сказал Васе: «Я задумал двузначное число. Если переставить его цифры, то получится число, которое в сумме с задуманным даст 143. Отгадай задуманное число, если известно, что оно простое». Какое число задумал Петя? (7 баллов)

Ответ. 67. Пусть *a*, *b* – цифры задуманного числа. Тогда из условий задачи , откуда *a* + *b* = 13. Учитывая, что *a*, *b* – цифры, отсюда получаем шесть возможных вариантов задуманного числа: 94, 85, 76, 67, 58, 49. Из этих вариантов только 67 простое число.



3. В окружности с центром в точке О проведены радиусы ОВ и ОА так, что ﮮАОВ=60°, ОВ = DС. Найдите величину ﮮАDО.

Решение

Проведем СО, притом CO=DC=OA. Тогда треугольники ODC, AOC– равнобедренные. Если ﮮАDО=x, то ﮮАCО= ﮮCАО= 2x . Зная, что ﮮАОВ=60°является внешним углом для треугольника АDО составим уравнение x+2x=60°. Ответ:  ﮮCDO = 20°.

4. Дворники получают грабли и метлы. Если каждый возьмет одну метлу или одни грабли, то останется 14 метел. А чтобы дать каждому дворнику и одну метлу, и одни грабли, не хватает 10 грабель. Сколько было дворников, сколько метел и сколько грабель? (7 баллов)

Ответ: 24 дворника, 24 метлы и 14 грабель.

5. На клетчатой бумаге нарисован квадрат со стороной 5 клеток. Его требуется разбить на 5 частей

одинаковой площади, проводя отрезки внутри квадрата только по линиям сетки. Сделайте это так,

чтобы сумма длин всех проведенных отрезков была равна 16 клеткам. (7 баллов)

Решение*.* Один из возможных примеров приведен на рисунке*.*



**Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников**

**9 класс.**

1. Можно ли в равенстве 1\*2\*3\*…\*10 = 0. Вместо знаков \* поставить знаки плюс и минус так, чтобы получилось верное равенство? (7 баллов)

Ответ: нельзя. Четность числа 1± 2 ± 3 ± …± 10 не зависит от выбора знаков; она зависит только от того, сколько в этом выражении нечетных чисел. В этом выражении пять нечетных чисел, поэтому оно всегда будет нечетным.

2. Постройте график функции y = |x - 1| - |2 - x| + 2. (7 баллов)

Ответ:

3. В хоре число девочек относилось к числу мальчиков как 4:3. После того как в хор пришли двое новеньких, это соотношение стало 3:2. Сколько мальчиков было в хоре вначале? (7 баллов)

 Ответ: Мальчиков было 12. *Решение:* Пусть вначале было девочек,  мальчиков. Пусть среди новеньких  девочек. Тогда := 3:2. Отсюда  Единственно возможное значение  приводит к 

**4**. В трапеции длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований, а угол между диагоналями равен 60°. Докажите, что трапеция – равнобедренная. (7 баллов)

Решение

Пусть AD = a, BC = b, AC = a + b. Продолжим AD за точку D на расстояние DM = BC. Тогда очевидно, что АСМ - равносторонний. Но это значит, что АОD и ВОС - тоже равносторонние. Отсюда непосредственно следует, что АОВ = СОD, откуда имеем, что AB = CD.

****

5. Каждому из двух муравьёв, Толстому и Тонкому, нужно перенести по 150 г груза, из точки А

(где они сейчас находятся) в точку В, расстояние между которыми равно 15 метров. Толстый

муравей ходит со скоростью 3 м/мин, но может унести 5 г груза, Тонкий – со скоростью

5 м/мин, но может унести лишь 3 г груза. Кто из них быстрее доставит весь свой груз в точку

В? Скорость муравья с грузом не отличается от скорости муравья без груза. (7 баллов)

Ответ*.* Толстый справится на 2 мин раньше.

Решение*.* Чтобы донести груз, Толстому нужно сделать 30 рейсов из точки А в точку В и 29

обратных рейсов из точки В в точку А. На один рейс у него уходит 5 минут, а на весь путь

уйдет 5·(30+29)=295 мин. Тонкому муравью нужно сделать 50 рейсов из точки А в точку В и 49

обратных рейсов из точки В в точку А. У него на один рейс уходит 3 минуты, а на весь путь

уйдет 3·(50+49)=297 мин. Поэтому Толстый окончит свою работу раньше.

**Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников**

**10 класс.**

**1.** Найти все такие двузначные числа *A*, для каждого из которых два из следующих четырех утверждений верны, а два -- неверны:
а) *A* делится на *5,*
б) *A* делится на *23,*
в) *A+7* есть точный квадрат,
г) *A-10* есть точный квадрат. (7 баллов)

Решение

Нужно перебрать все возможные варианты. Их всего *6*: 1) а, б; 2) а, в; 3) а, г; 4) б, в; 5) б,г; 6) в,г. Верны только 3) и 6)

Ответ: 35 и 74.

**2.** В тот день, когда Диму поздравляли с днём рождения его брат и сестра, Дима сказал:

«Смотрите, как интересно, я теперь вдвое старше брата и втрое старше сестры!» – «А ваш средний

возраст 11 лет», – подхватил папа. Сколько лет исполнилось Диме? (7 баллов)

Ответ*.*18 лет.

Решение*.* По условию задачи можно составить уравнение. Пусть возраст Димы – х

лет, тогда возраст сестры х/3, а брата – х/2; (х + х/3 + х/2):3=11. После решения этого уравнения

получаем, что х=18. Диме исполнилось 18 лет.

**3.** В подводном царстве живут осьминоги с семью и восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда врут,

а те, у кого 8 ног, всегда говорят правду. Однажды между тремя осьминогами состоялся такой

разговор.

Зелёный осьминог: «У нас вместе 21 нога».

Синий осьминог (зелёному): «Всё ты врёшь!»

Красный осьминог: «Да оба вы врёте!»

1) Мог ли зеленый осьминог сказать правду? Почему?

2) Сколько ног было у каждого осьминога? (Ответ обоснуйте.) (7 баллов)

Решение*.*

1) Если бы зелёный осьминог сказал правду, то у каждого осьминога было бы по 7 ног. Значит,

сам зелёный осьминог согласно условию должен был солгать. Получаем противоречие,

следовательно, зелёный осьминог солгал.

2) Так как зелёный осьминог солгал, то у него 7 ног. Синий осьминог сказал про зелёного правду,

значит, у него 8 ног. Красный осьминог солгал, так как перед ним солгали не оба, а только один,

значит, у красного 7 ног.

**4**. Стрелок десять раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков. Сколько попаданий было в семерку, восьмерку и девятку, если десяток было четыре, а других попаданий и промахов не было? (7 баллов)

Решение:

Так как стрелок попадал лишь в семерку, восьмерку и девятку в остальные шесть выстрелов, то за три выстрела (по одному разу в семерку, восьмерку и девятку) он наберет 24 очка. Тогда за оставшиеся 3 выстрела надо набрать 26 очков. Что возможно при единственной комбинации 8+9+9=26. Итак, в семерку стрелок попал 1 раз, в восьмерку – 2 раза, в девятку – 3 раза.

**5.** Фирма изготавливает лимонный напиток, разбавляя лимонный сок водой. Сначала фирма

производила напиток, содержащий 15% лимонного сока. Через некоторое время генеральный

директор отдал указание снизить содержание лимонного сока до 10%. На сколько процентов

увеличится количество производимого лимонного напитка при тех же объёмах поставок лимонов? (7 баллов)

Ответ*.* На 50%.

Решение*.* Пусть х – количество производимого напитка до указания генерального директора. Тогда

количество лимонного сока в этом напитке – 0,15·х. Пусть теперь у – количество производимого

напитка после указания генерального директора. Тогда количество лимонного сока в этом напитке

– 0,1·у. Так как подразумевается, что количество лимонного сока не изменилось, получаем

равенство 0,15·х = 0,1·у. Умножив обе части этого равенства на 10, получим: у = 1,5·х; или: у = х +

0,5·х. Значит, количество производимого напитка увеличилось на 50%.

**Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников**

**11 класс.**

**1.** Служившему воину дано вознаграждение: за первую рану 1 копейка, за вторую – 2 копейки, за третью – 4 копейки, за четвертую – 8 копеек и т.д. По исчислению нашлось, что воин получил всего вознаграждения 655 руб. 35 копеек. Спрашивается число его ран. (7 баллов)

Решение.

1 + 2 + 4 + 8 + … + 2*n* = 65535 – это сумма геометрической прогрессии, где *а1* = 1, *а2* = 2, и т.д. Таким образом, *q* = 2. Формула суммы геометрической прогрессии 



Ответ: 16.

**2.** Петя сбегает с четвёртого этажа на первый на 2 секунды быстрее, чем мама едет на лифте.

Мама едет на лифте с четвёртого этажа на первый на 2 секунды быстрее, чем Петя сбегает с

пятого этажа на первый. За сколько секунд Петя сбегает с четвёртого этажа на первый? (Длины

пролетов лестницы между всеми этажами одинаковы). (7 баллов)

Ответ*.* За 12 секунд*.*

Решение*.* Между первым и четвертым этажами 3 пролета, а между пятым и первым – 4.

Согласно условию, Петя 4 пролета пробегает на 2 секунды дольше, чем мама едет на лифте, а

три пролета – на 2 секунды быстрее мамы. Значит, за 4 секунды Петя пробегает один пролет.

Тогда с четвертого этажа на первый (т.е. на 3 пролета) Петя сбегает за 4· 3=12 секунд.

**3**. Найдите все значения параметра *а*, такие, что уравнение  имеет два действительных корня, сумма квадратов которых равна 6. (7 баллов)

Ответ. . Из условий задачи следует, что должно выполняться условие  и равенство  (здесь мы использовали теорему Виета). Решая последнее уравнение относительно *а*, получим . Корень  этого уравнения удовлетворяет неравенству , а корень *а*1=1 – нет.

**4.** Сколько существует трёхзначных чисел, которые в 5 раз больше произведения своих цифр? (7 баллов)

Ответ*.* Одно число 175.

Решение*.* Первый способ*.* В составе цифр, которыми записывается число, нет цифры 0, иначе не

может быть выполнено условие задачи. Данное трехзначное число получено умножением на 5

произведения своих цифр, следовательно, оно делится на 5. Значит, его запись оканчивается

цифрой 5. Получаем, что произведение цифр, умноженное на 5, должно делиться на 25. Заметим,

что четных цифр в записи числа быть не может, иначе произведение цифр было бы равно нулю.

Таким образом, трехзначное число должно делиться на 25 и не содержать четных цифр. Таких

чисел только пять: 175, 375, 575, 775 и 975. Произведение цифр искомого числа должно быть

меньше 200, иначе, умноженное на 5, даст четырехзначное число. Поэтому числа 775 и 975

заведомо не подходят. Среди оставшихся трех чисел только 175 удовлетворяет условию задачи.

**5.** Какую наибольшую длину может иметь ребро правильного тетраэдра, который помещается в коробку, имеющую форму куба со стороной 1 см? Ответ обоснуйте. (7 баллов)

Решение.

Радиус сферы RT, описанной около тетраэдра, не будет превосходить радиус сферы RK, описанной около куба. Пусть сторона тетраэдра *а*. Она будет равна ((2√3)/3)·RT. Самый большой тетраэдр, удовлетворяю­щий условию RT = RK, будет тетраэдр, ребра которого будут диагоналями куба.  В этом случае RK = √3/2, потому *a* = (2√6)/3· RT= (2√6)/RK= (2√6)/3 >· √6\3 = √2. Ответ: √2 см.