М171124

Тетрадь

для Олимпиадная работа муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике

учени _____ класса _____

обучающегося 11 класса школы муниципального бюджетного образовательного учреждения гимназии №10 МИК

Гомкодера Даниила Юрьевича

Педагог наставн
преподаватель МБОУ
гимназии №10 МИК К
Лариса Викторовна

17 ноября 2017г

М171124

№1

$X^x + X^{1-x} = X+1 \quad | \cdot X^x$, $X^x > 0$ по условию

$X^{2x} + X = X^{x+1} + X^x$

$X^{2x} - X^x + X - X^{x+1} = 0$

$X^x(X^x - 1) + X(1 - X^x) = 0$

$(X^x - X)(X^x - 1) = 0$

$X^x = X \qquad X^x = 1$

$X = 1 \qquad X = 1$

$X = 1$ удовлетворяет условию, что $X > 0$

Ответ: $X = 1$.

	№1	№2	№3	№4	№5
	7	7	7	6	7

Итого 34б

Председатель Козлова Трубылева Н.Б. Е.А. Козлова Грит / Сергей Сергеевич 7б

7б

№2

Найти: $C + 1{,}1C$ – ? наименьшее

	Маша	Ваня
1-ый день	$0{,}75a$	a
2-й день	$1{,}2b$	b
сумма	$1{,}1C$	C

$0{,}75a = \frac{3}{4}a$; $a \vdots 4$

$1{,}2b = \frac{6}{5}b$; $b \vdots 5$

7б

$$\begin{cases} 1{,}1C = 0{,}75a + 1{,}2b \\ C = a + b \quad | \cdot 1{,}1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1{,}1C = 0{,}75a + 1{,}2b \\ 1{,}1C = 1{,}1a + 1{,}1b \end{cases}$$

$0{,}75a + 1{,}2b = 1{,}1a + 1{,}1b$

$0{,}1b = 0{,}35a$

$b = 3{,}5a = \frac{7}{2}a$, $a \vdots 2$

Таким образом:

$b = 3{,}5a = \frac{7}{2}a$

$a \vdots 4$; $b \vdots 5$, но тогда и $a \vdots 5$

минимальное a, которое кратно 4 и 5

$a = 20$ (4 и 5 – взаимно простые числа)

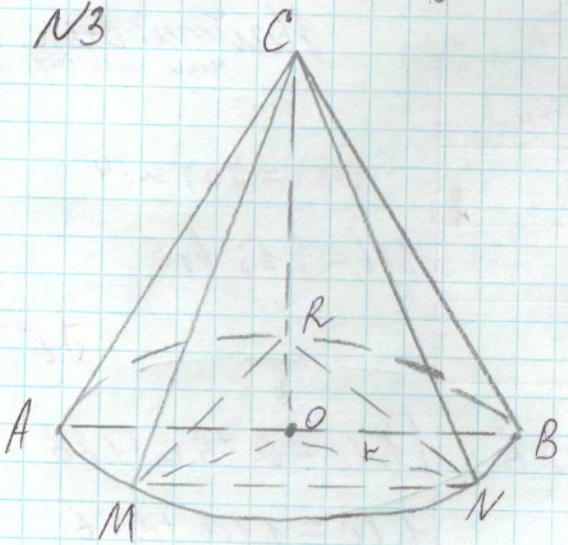
тогда $b = 70$

$c = a + b = 90$

$2{,}1c = 90 \cdot 2 + 9 = 189$ – наименьшее возможное

Ответ: 189 ягод.

№3



Дано:

$CR \perp CN$

$CN \perp CM$

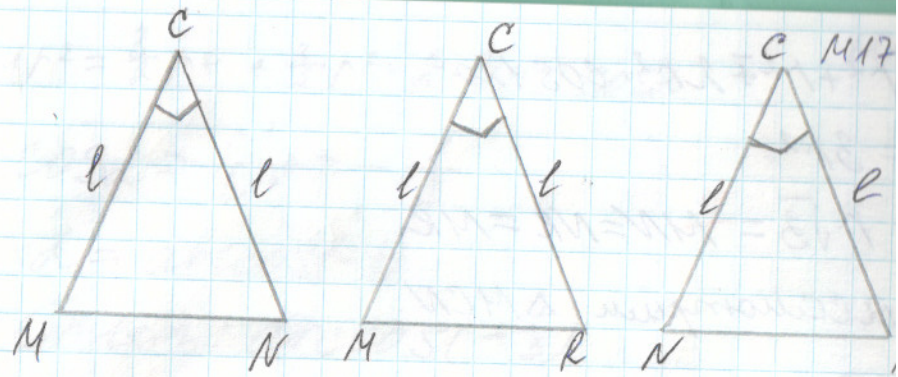
$CR \perp CM$

Найти:

$\angle ACB$ – ?

(ACB – осевое сечение)

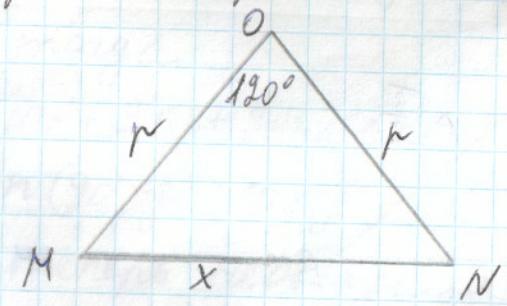
1) Рассмотрим $\triangle MCN$, $\triangle MCR$ и $\triangle NCR$



$MC = NC = RC = l$; все треугольники прямоугольные, а тогда $\triangle MCN = \triangle RCM$ (по 2 катетам) и тогда $MN = MR =$

2) MN, MR и NR являются хордами окружности основания, а равные хорды стягивают равные дуги тогда $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{NR} = \overset{\frown}{RM}$, но тогда $\angle ROM = \angle MON = \angle NOR = \alpha$ (как центральные опирающиеся на равные дуги), а $\alpha = 1$

3) рассмотрим $\triangle MON$:



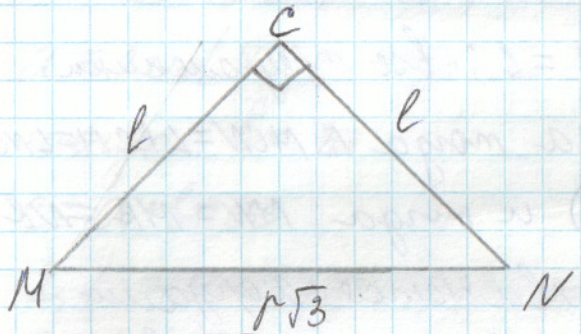
по т. косинусов:

$x^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot \cos 120°$

$x^2 = 3r^2$

$x = r\sqrt{3} = MN = NR = MR$

4) рассмотрим $\triangle MCN$



по т. Пифагора:

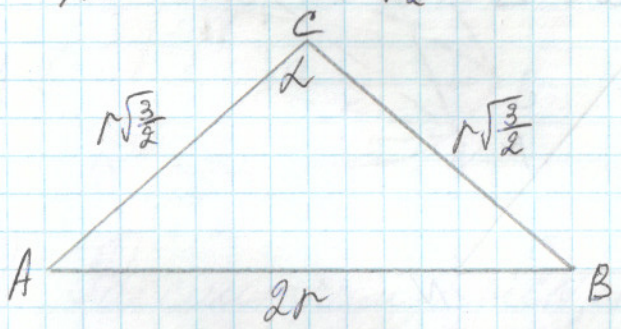
$l^2 + l^2 = 3r^2$

$l^2 = r^2 \cdot \frac{3}{2}$

$l = r\sqrt{\frac{3}{2}}$

5) рассмотрим осевое сечение ACB:

$AC = CB = l = r\sqrt{\frac{3}{2}}$



по т. косинусов:

$4r^2 = \frac{3}{2}r^2 + \frac{3}{2}r^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}r^2 \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = -\frac{r^2}{3r^2} = -\frac{1}{3}$

$\alpha = \arccos(-\frac{1}{3})$

Ответ: $\arccos(-\frac{1}{3})$.

7

№4

Дано:

$\alpha, \beta, \gamma < 90°$

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Док-ать: $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 2$

Решение: из условия следует, что:

$\cancel{\begin{cases} \alpha + \beta > 90° \\ \beta + \gamma > 90° \end{cases} \begin{cases} \beta > 90° - \alpha \\ \beta > 90° - \gamma \end{cases} \begin{cases} \sin\beta > \sin(90° - \alpha) \\ \sin\beta > (\sin 90° - \gamma \end{cases}}$

~~тогда~~

$\begin{cases} \alpha + \beta > 90° \\ \beta + \gamma > 90° \end{cases} \begin{cases} \alpha > 90° - \beta \\ \gamma > 90° - \beta \end{cases} \begin{cases} \sin\alpha > \sin(90° - \beta) \\ \sin\gamma > \sin(90° - \end{cases}$

тогда

$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > \sin(90° - \beta) + \sin\beta + \sin(90$

$\sin(90° - \beta) = \cos\beta$

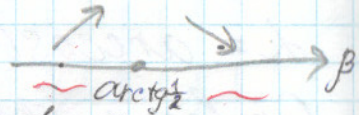
теперь необходимо док-ать что

$2\cos\beta + \sin\beta > 2$, где $\beta < 90°$

$f(\beta) = 2\cos\beta + \sin\beta$

$f'(\beta) = -2\sin\beta + \cos\beta = 0$

$2\sin\beta = \cos\beta$



$tg\,\beta = \frac{1}{2}$; $\beta = arctg\,\frac{1}{2}$

при этом $1 + tg^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$

$\frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2\beta}$; $\cos^2\beta = \frac{4}{5}$; $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$; $\sin^2\beta = \frac{1}{5}$; $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

1) Найдем значение при $\beta = arctg\,\frac{1}{2}$

$2\cos\beta + \sin\beta = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} > 2$, но

$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 2\cos\beta + \sin\beta > 2$, а тогда

$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 2$, что и требовалось доказать. (наибольшее значение)

2) $\beta \in (0; \frac{\pi}{2})$ (рассмотрим возможные наименьшие значения)

при $\beta = 0$

$2\cos\beta + \sin\beta = 2$, но поскольку $f(x)$ возрастает на $(0; arctg\,\frac{1}{2})$, то при $\beta > 0$, $2\cos\beta + \sin\beta > 2$, что и требовалось доказать.

3) $\beta = \frac{\pi}{2}$

$2\cos\beta + \sin\beta = 1$, что нам не подходит

этом случае вернемся к исходному неравенству

$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 2$, $\beta = \frac{\pi}{2}$

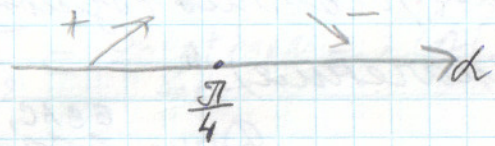
$\sin\alpha + \sin\gamma > 1$

$\gamma + \alpha = 90$; $\gamma = 90° - \alpha$; $\sin\gamma = \cos\alpha$

$\sin\alpha + \cos\alpha > 1$

$g(\alpha) = +\cos\alpha - \sin\alpha = 0$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$



при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ – значение наибольш

$\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$

а) $\alpha = 0$

$\sin\alpha + \cos\alpha = 1$, но $g(x)\uparrow$ $(0; \frac{\pi}{4})$ и тогда при $\frac{\pi}{4} > \alpha > 0$

$\sin\alpha + \cos\alpha > 1$

б) $\alpha = \frac{\pi}{2}$

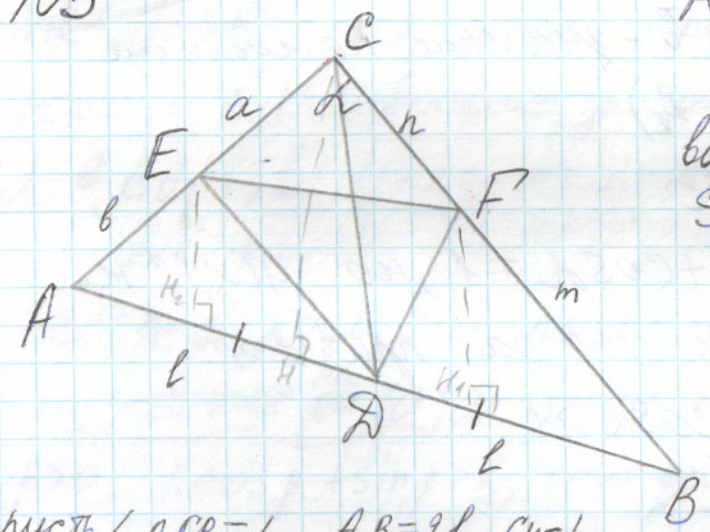
$\sin\alpha + \cos\alpha = 1$, но $g(\alpha)\downarrow$ на $(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$,
а тогда при $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$:
$\sin\alpha + \cos\alpha > 1$, что и требовалось доказать;

Тогда имеем, что при $\frac{\pi}{2}$ неравенство верно, а при $\beta \in (\operatorname{arctg}\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2})$; $f(\beta)\downarrow$ и неравенство тоже будет верным;

Таким образом, во всех случаях неравенство $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq 2$ оказывалось верным, что и требовалось доказать (рассматривались возможные минимальные значения).

68

№5



Дано: $E \in AC$, $F \in BC$

Док-ать: возможно ли $S_{DEF} \geq S_{AED} + S_{AFB}$

пусть $\angle ACB = \alpha$, $AB = 2l$, $CH = h$

1) $\frac{a}{a+b} = k$; $\frac{b}{a+b} = 1-k$

$\frac{n}{n+m} = r$; $\frac{m}{n+m} = 1-r$

2) $S_{ECF} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot n \cdot \sin\alpha$

$S_{DFB} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot h \cdot \frac{m}{m+n}$ (из подобия $\triangle CHB$ и $\triangle FH_1$

$S_{AED} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot h \cdot \frac{b}{a+b}$ (аналогично S_{DFB})

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot (a+b)(m+n) \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot h$

$f_1 = \frac{S_{ECF}}{S_{ABC}} = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{n}{m+n} = k \cdot r$

$f_2 = \frac{S_{DFB} + S_{AED}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} lh(1-r+1-k)}{h \cdot l} =$

$f_3 = \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}$

поскольку $S_{DEF} + S_{DFB} + S_{AED} + S_{ECF} = S$

$f_1 + f_2 + f_3 = 1$

$k \cdot r + 1 - \frac{k+r}{2} + f_3 = 1$

$f_3 = \frac{k+r}{2} - k \cdot r$; если $S_{DEF} > S_{AED}$

то $f_3 > f_2$

$\frac{k+r}{2} - k \cdot r > 1 - \frac{k+r}{2}$

$k+r-k\cdot r-1>0$

$k\cdot r-k-r+1<0$

$k(r-1)-(r-1)<0$

$(k-1)(r-1)<0$

значит при $k<1 \Rightarrow r>1$

при $r<1$, $k>1$, т.е.

7б

в любом случае либо $k>1$, либо $r>1$, но тогда получится противоречие с условием задачи ($E \in AC$, $F \in BC$) и такое невозможно, что $S_{DEF} > S_{AED} + S_{BFD}$.